Содержание

ВВЕДЕНИЕ 3

1. Актуальность темы 3

1.1. Историческая справка 4

2. Основная часть. Элементы и виды треугольников 5

2.1. Элементы треугольников 5

2.2. Виды треугольников 5

2.3. Признаки равенства треугольников 6

2.4. Признаки равенства прямоугольных треугольников 6

3. Практическое использование знаний свойств треугольника 6

3.1. Замечательные точки треугольника 6

3.2. Треугольники вокруг нас 7

3.3. Решение задач на применение треугольника 9

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 10

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ИСТОЧНИКИ 11

Приложения I

Научная работа

Треугольник, простейший и неисчерпаемый

Справцева Марина Александровна

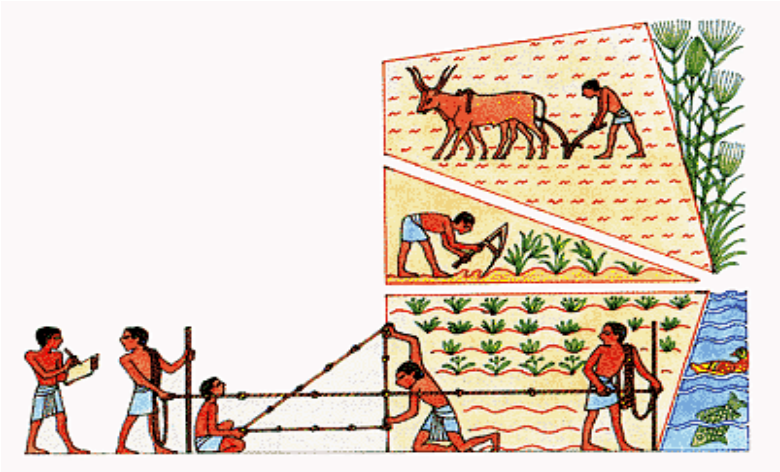
Ханты-Мансийский автономный округ-Югра (Тюменская область)

город Нижневартовск

Муниципальное бюджетное образовательное учреждение

«Средняя общеобразовательная школа №14», 7 А класс

ВВЕДЕНИЕ



Треугольники не раз
Выручают в жизни нас,
В простоте таких фигур
Прочность каменных фактур.
Николай Чайкин

Треугольник по праву считается простейшей из фигур: любая плоская, то есть простирающаяся в двух измерениях, фигура должна содержать хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой. Если соединить эти точки попарно прямолинейными отрезками, то построенная фигура и будет ***треугольником.*** Так же называют и заключенную внутри образовавшегося контура часть плоскости. Любой плоскостной многоугольник может быть разбит на треугольники. Математики называют треугольник двумерным “симплексом” - по латыни означает простейший.

Актуальность темы

Актуальность темы состоит в том, что изучение треугольника продиктовано самой жизнью. Платон утверждал, что вообще вся «поверхность состоит из треугольников». То есть во всем, что есть вокруг нас, можно найти треугольники. А увидев их и зная их свойства, можно решить множество практических задач. Математические знания часто оторваны от жизни. Люди знают чистую математику, но не могут применить знания на практике. Решение математических задач практического содержания позволяет убедиться в значении математики для различных сфер человеческой деятельности, увидеть широту возможных приложений математики, понять её роль в современной жизни.

Историческая справка

Треугольник – самая простая замкнутая прямолинейная фигура, одна из первых, свойства которых человек узнал еще в глубокой древности, так как эта фигура всегда имела широкое применение в практической жизни.

Крупнейший древнегреческий историк Геродот (V век до нашей эры) оставил описание того, как египтяне после каждого разлива Нила заново размечали плодородные участки его берегов, с которых ушла вода. По Геродоту, с этого и началась геометрия – "землемерие" (от греческого "гео" – "земля" и "метрео" – "измеряю"). Древние землемеры выполняли геометрические построения, измеряли длины и площади; астрологи рассчитывали расположение небесных светил – все это требовало весьма обширных познаний о свойствах плоских и пространственных фигур, и в первую очередь о треугольнике. Изображения треугольников и задачи на треугольники встречаются во многих папирусах Древней Греции и Древнего Египта. Еще в древности стали вводить некоторые знаки обозначения для геометрических фигур.

Древнегреческий ученый Герон (I век) впервые применил знак Δ вместо слова треугольник.

Прямоугольный треугольник применялся тысячелетия назад строителями египетских пирамид. В Древней Греции уже был известен способ построения прямоугольного треугольника на местности. Для этого использовали веревку, на которой были завязаны 13 узелков, на одинаковом расстоянии друг от друга. При строительстве пирамид в Египте именно так изготавливали прямоугольные треугольники. Поэтому прямоугольный треугольник со сторонами **3, 4, 5** назвали египетским треугольником. Прямоугольный треугольник занимал почетное место в Вавилонской геометрии.

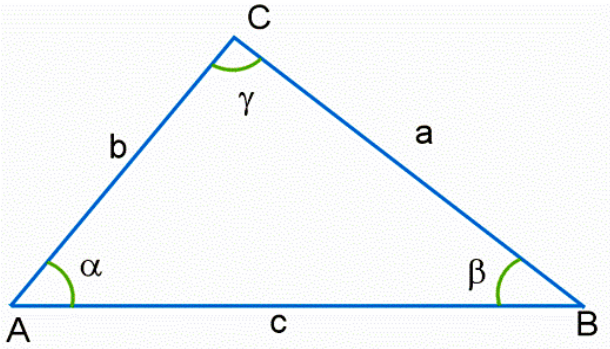
В древней Греции учение о треугольнике развивалось в ионийской школе, основанной в VII веке до нашей эры Фалесом, в школе Пифагора и других; оно было полностью изложено в первой книге «Начал» Евклида. Среди "определений", которыми начинается эта книга, имеются и следующие: "Из трехсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же – имеющая только две равные стороны, разносторонний – имеющая три неравные стороны".

Со времён палеолита и неолита в древнем искусстве очень широко распространяются изображения равностороннего треугольника. Вожди племен североамериканских индейцев носили на груди символ власти: равносторонний треугольник. В Африке женщины украшали себя большими пластинами из равносторонних треугольников.

2. Основная часть. Понятие о треугольнике

2.1. Элементы треугольника

Треугольник – многоугольник с тремя сторонами, или замкнутая ломаная линия с тремя звеньями, или фигура, образованная тремя отрезками, соединяющими три точки, не лежащие на одной прямой.



У любого треугольника сумма углов равна развернутому углу или 180º.

Основными элементами треугольника ABC являются:

вершины - точки **A**, **B** и **C**;

стороны - отрезки **a = BC**, **b = AC**, **c = AB**, соединяющие вершины;

углы - α, β, γ, образованные тремя парами сторон. Углы обозначают буквами **A, B** и **C.**

Высота треугольника – это перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону. **(Приложение 1)**

Медиана треугольника (от лат. mediana – «средняя») – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. **(Приложение 2)**

Биссектриса треугольника (от лат. bis – дважды» и seko – рассекаю) – это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны. **(Приложение 3)**

2. 2. Виды треугольников

Треугольник называется ***остроугольным***, если все три его угла — острые, то есть меньше 90°.

Треугольник называется ***тупоугольным***, если один из его углов — тупой, то есть больше 90°.

Треугольник, у которого один из углов прямой, называется **прямоугольным.** Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется **гипотенузой**, две другие стороны называются **катетами**.

Равнобедренный треугольник — треугольник, в котором две стороны равны между собой.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется ***равносторонним*** или ***правильным.*** Все углы в равностороннем треугольнике равны **60°. (Приложение 4)**

2.3. Признаки равенства треугольников

- Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

- Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

- Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны. **(Приложение 5)**

2.4. Признаки равенства прямоугольных треугольников

- Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

- Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

- Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

- Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны. **(Приложение 6)**

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗНАНИЙ СВОЙСТВ ТРЕУГОЛЬНИКА

3.1. Замечательные точки треугольника

В четвертой книге "Начал" Евклид решает задачу: "Вписать круг в данный треугольник". Из решения вытекает, что три **биссектрисы** внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанного круга. Из решения другой задачи Евклида вытекает, что **перпендикуляры**, восстановленные к сторонам треугольника в их серединах, тоже пересекаются в одной точке – центре описанного круга. В "Началах" не говорится о том, что и три **высоты** треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром (греческое слово "ортос" означает "прямой", "правильный"). Четвертой особенной точкой треугольника является точка пересечения **медиан**. Архимед доказал, что она является центром тяжести (барицентром) треугольника. **(Приложение 7)**

Начиная с XVIII века **четыре точки** были названы **"замечательными"** точками треугольника. Исследование свойств треугольника, связанных с этими и другими точками, послужило началом для создания новой ветви элементарной математики –

"геометрии треугольника" или "новой геометрии треугольника", одним из родоначальников которой стал Леонард Эйлер.

В **1765** году **Эйлер** доказал, что во всяком треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений) и точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежат на одной прямой (эта прямая называется ***прямой Эйлера)***. **(Приложение 8)**

Большой вклад в развитие геометрии треугольника внесли математики XIX – XX веков французские математики Ж. Понселе, Ш. Брианшон, Лемуан, Брокар, Тебо.

3.2. Треугольники вокруг нас

Треугольник — фигура жёсткая. Если возьмём три металлические или деревянные планки, закрепим их концы булавками или гвоздиками так, чтобы получить треугольник, то увидим, что нам не удастся изменить форму полученного треугольника.

Все законы красоты невозможно вместить в несколько формул, но, изучая математику, мы можем открыть некоторые слагаемые прекрасного.

Одним из символов прекрасного в геометрии, является равносторонний треугольник. У него все стороны и все углы равны, поэтому его еще и называют правильным треугольником.

В военной эмблематике **треугольник** был знаком отличия младшего командного состава Красной армии.

В истории европейского костюма XVIII столетия весьма заметное место принадлежит **треуголке** — украшенной перьями и галунами фетровой шляпе, с полями, сдавленными в трех углах. Мода на этот оригинальный головной убор, возникшая во Франции, быстро распространилась по всем странам Европы. Треуголку признали не только дворяне, но и представители третьего сословия; во многих армиях мира, в том числе и в российской, треуголка была частью униформы; а в период рококо ее стали носить и женщины.

Самое широкое применение нашел **треугольник** и в современной эмблематике. Отдельная группа дорожных знаков, вписанных в желтый треугольник с красным окаймлением, носит предупреждающий характер, информируя водителя о той или иной опасности, ожидающей его на дороге; технические знаки — зигзаг молнии, восклицательный знак и другие знаки, помещенные внутри желтого треугольника, требуют внимания и предупреждают об опасности.

В наше время интерес к магической гексаграмме, несколько угасший в Европе, с новой силой возродился на африканском континенте. В Эфиопии, например, золотая

шестиконечная «звезда Давида» является главным элементом двух высоких государственных наград — орденов «Печати Соломона» и «Царицы Савской».

В классической геральдике треугольнику не нашлось достойного места, но в современной отечественной геральдике эта фигура используется: на гербе Магнитогорска Челябинской области. Месторождения железной руды обозначаются знаком Δ - место добычи полезных ископаемых.

Важную роль в архитектуре играет геометрическая символика космоса: все круглые формы выражают идею неба, квадрат - это земля, **треугольник - символизирует взаимодействие между землей и небом.**

Изящество и красота применения треугольника создают ощущение элитарности. На самом деле треугольники используются везде и всюду. Первобытные люди покрывали сферические сосуды сетью круглых равносторонних треугольников. Символическое изображение треугольника есть в архитектуре и строительстве (пирамиды), во фрагментах одежды и украшениях. Фронтоны древнегреческих храмов в самой глубокой древности делали треугольными и всячески украшали.

Стропила зданий имеют вид треугольников. Это придаёт им крепость и устойчивость. При устройстве садовой калитки обязательно прибивают планку (доску), иногда две планки, чтобы получились треугольники. Это придаёт крепость калитке; иначе её скоро перекосит.

Треугольники применяют в конструкции мостов. На практике пользуются жёсткостью треугольника.

Рассматривая различные жилища людей: вигвам, юрта, палатка, мы видим, что они имеют конусообразную форму, в сечении получается треугольник. Такие сооружения легко обдуваются ветрами, с них быстро стекает вода. Крыши старых деревянных домов и современных многоэтажек имеют форму треугольника.

Обращая внимание на предметы одежды человека, заметим, что различные головные уборы: треуголки, пилотки, колпаки, косынки – имеют треугольную форму. Женские платки складывают пополам. При шитье юбки часто втачивают клинья, которые тоже имеют форму треугольника, что придает юбке пышность. Чтобы одежда не помялась, ее хранят на плечиках, имеющих треугольную форму.

Сейчас письма мы отправляем в прямоугольных конвертах, а во время войны, письма имели треугольную форму.

У пирамид боковые грани имеют форму треугольника, все боковые грани равны. В Древнем Египте пирамиды служили усыпальницами египетских фараонов. Крупнейшие

из них – пирамиды Хеопса, Хефрена и Микерина – в древности считались одним из семи чудес света.

Треугольник есть среди музыкальных инструментов.

Треугольники делают **высоковольтные линии электропередач** более надежными.

Треугольники используют в различных **играх**, например в бильярде или боулинге.

Из треугольников можно сложить различные орнаменты. В этом видна красота и гармония. Для составления красивых паркетов чаще всего используются треугольники. **(Приложение 9)**

Бермудский треугольник находится в Атлантическом океане. В этом месте самолеты становились неуправляемыми, бесследно исчезли множество кораблей и самолетов. Корабли и самолеты исчезали даже в ясную, безветренную погоду. **(Буклет)**

3.3. Решение задач на применение треугольника

1. В условиях плохой видимости с береговых радиомаяков А и В, расстояние между которыми равно 10 км, запеленговано судно С. Определите расстояние от судна до каждого маяка, если с помощью радиопеленгаторов определены $\angle CAB=35°$, $\angle CBA=50°$.

2. Береговые радиомаяки А и В расположены на расстоянии 10 км. С судна С с помощью находящейся на ней радиолокационной станции, определены расстояния до маяков СА=11 км и СВ=9 км. Найдите $\angle CAB$ и $\angle CBA$ пеленгов радиомаяков.

3. Два теплохода А и В, находящиеся в открытом море на расстоянии 20 км друг от друга, одновременно получили сигнал бедствия с тонущего корабля С. Радиопеленг по отношению к линии АВ на судне А равен 55°, а на судне В – 100°. Кто первым придет на помощь, если максимальная скорость судна А - 60 км/ч, судна В - 45 км/ч?

4. Прямо по курсу ледокола В обнаружен айсберг. С помощью ультразвукового эхолота под максимальным углом 10° определена подводная точка С айсберга на расстоянии 200 м. Определите глубину h подводной части айсберга.

5. При исследовании металлической детали методом ультразвуковой локации была обнаружена внутренняя трещина. Определите длину трещины АВ, если расстояния от границ трещины до ультразвукового устройства С равны 50 см и 55 см, а $\angle ACB= 10°$.

6. Сейсмической станцией С зафиксированы сильные подземные толчки на расстоянии 100 км от станции под углом 50° к поверхности земли. Определите глубину эпицентра землетрясения h. **(Приложение 10)**

ВЫВОДЫ

Поставленная гипотеза: если научиться видеть треугольник в окружающем мире, то зная его свойства, можно с уверенностью решать некоторые математические задачи, справедлива и выполнима.

Исходя из поставленных задач, сделали **выводы**:

1) Была изучена литература по теме «Треугольник, простейший и неисчерпаемый»;
2) Изучены свойства треугольника; теоремы синусов и косинусов и применены знания на практике;
3) Рассмотрены виды использования треугольников в окружающем мире.
4) Выполнены творческие работы с использованием оригами (в основе – треугольник).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вот уже два с половиной тысячелетия треугольник является символом геометрии. Школьная геометрия только тогда может стать интересной и содержательной, когда в ней появляется глубокое и всестороннее изучение треугольника. Удивительно, но треугольник, несмотря на свою кажущуюся простоту, является неисчерпаемым объектом изучения - никто даже в наше время не осмелится сказать, что изучил и знает все свойства треугольника.

Практическая значимость исследования заключается в самой постановке выбранных целей и задач, так как материалы могут быть использованы на уроках геометрии в 7 - 11 классах, на факультативных занятиях. На наглядных примерах материалы усваиваются лучше.

В ходе выполнения исследовательской работы я поняла, что геометрия начинается с треугольника. Треугольник неисчерпаем. Две с половиной тысячи лет постоянно открываются новые свойства треугольника. Для себя открыла, чтобы построить столик с одной ножкой и крышкой – в форме треугольника, нужно найти особую точку, чтобы крышка стола была устойчивой. Эту точку в геометрии и в физике называют центром масс (точка пересечения медиан треугольника). Выполняя творческие работы: изготовление тюльпанов, журавликов, звездолетов и птицы, я самостоятельно изучила модульное оригами, в котором используется основной модуль – это двойной треугольник. **(Приложение 11)**

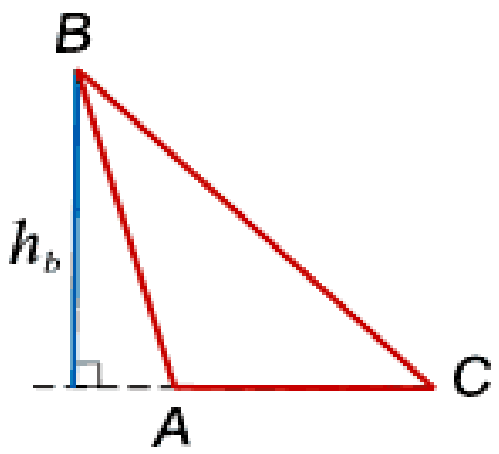
Новизна исследования заключается в том, что были решены практические задачи с использованием теоремы синусов и теоремы косинусов, которые я изучила раньше своих одноклассников.

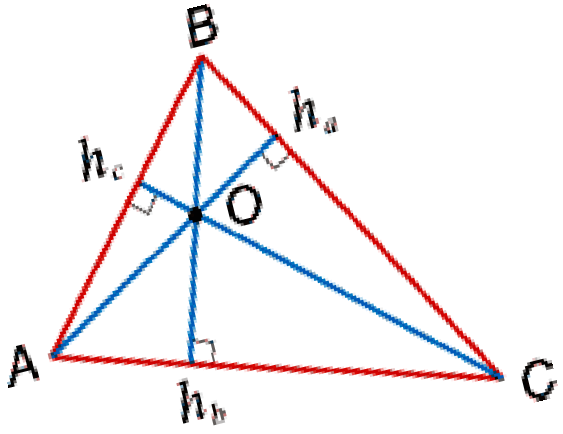
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Атанасян Л. С. Геометрия: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М. : Просвещение, 2002.
2. Большая математическая энциклопедия / Якушева Г.М. и др. – М.: Филол. О-во «СЛОВО»: ОЛМА-ПРЕСС, 2005. – 639 с.: ил.
3. Возникновение и развитие математической науки: Кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 159 с.: ил.
4. За страницами учебника алгебры: Кн. для учащихся 7 – 9 кл. сред. Шк. - М.: Просвещение, 1990. – 224 с.: ил.
5. Панов В. Ф. Математика древняя и юная/ Под ред. В. С. Зарубина. – 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 648с.
6. Энциклопедия для детей. Т.11.Математика / Глав. ред, М. Д. Аксёнова. – М.: Аванта+,1998. – 688 с.: ил.
7. Энциклопедия. Мудрость тысячелетий. – М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2004. – Автор-составитель В. Балязин. – 848 с.

Приложение 1

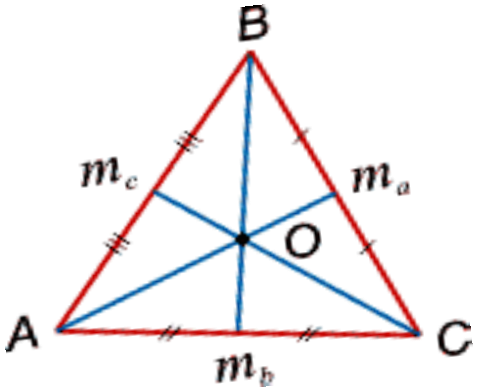
Высоты треугольника





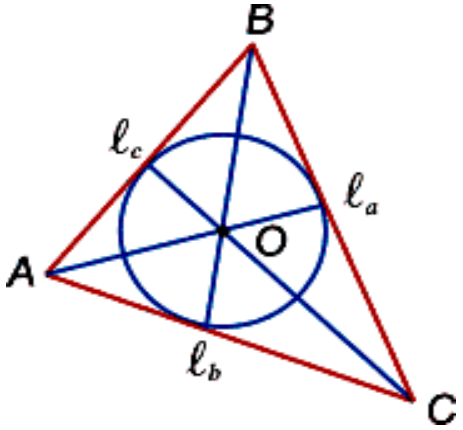
Приложение 2

Медианы треугольника



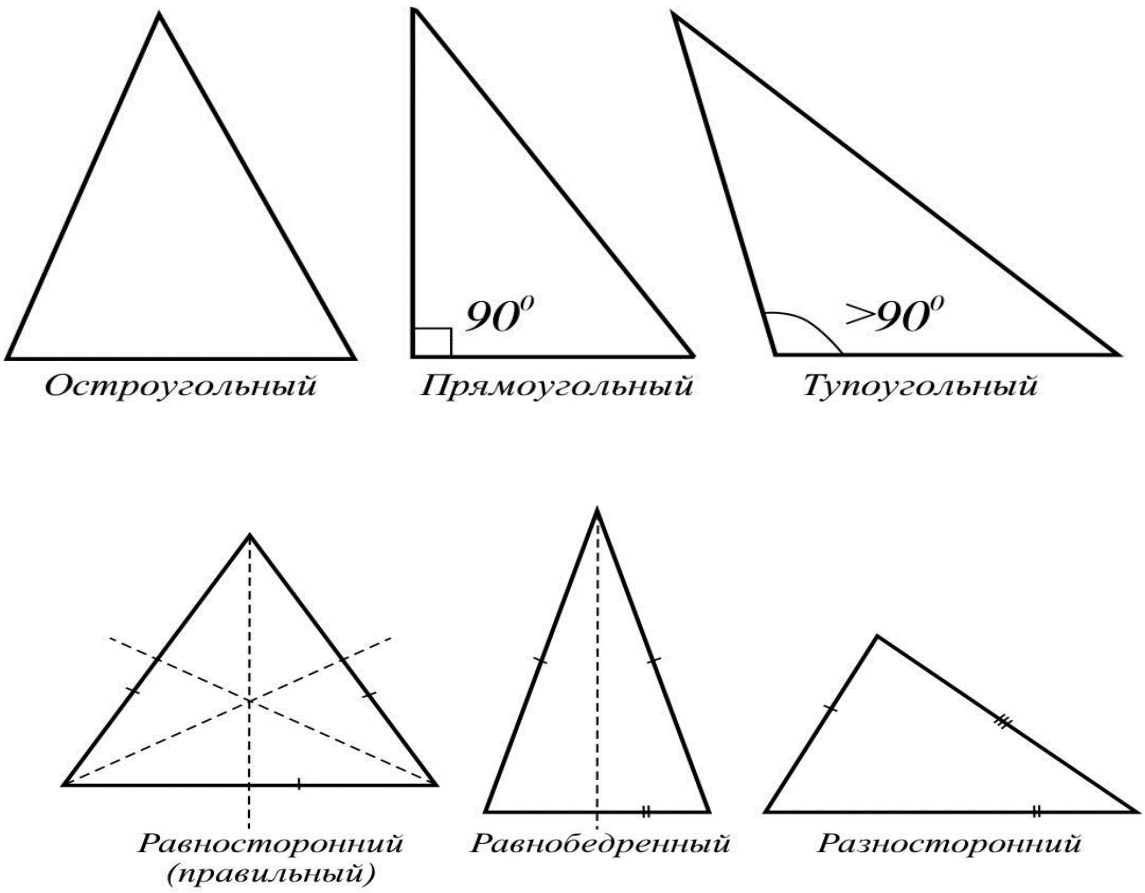
Приложение 3

Биссектрисы треугольника



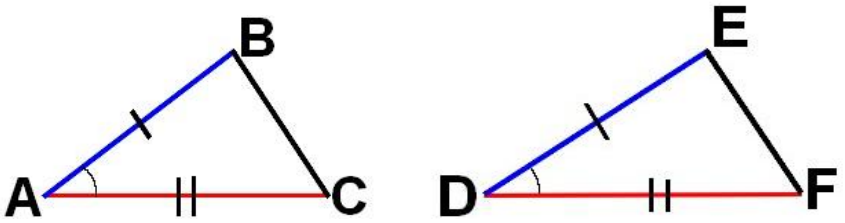
Приложение 4

Виды треугольников



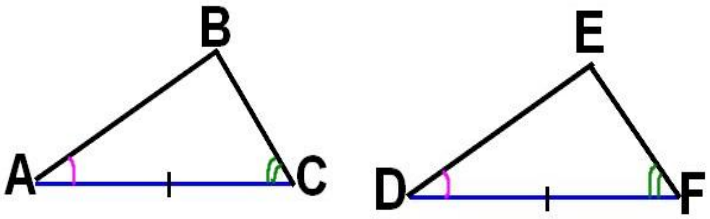
Приложение 5

Признаки равенства треугольников



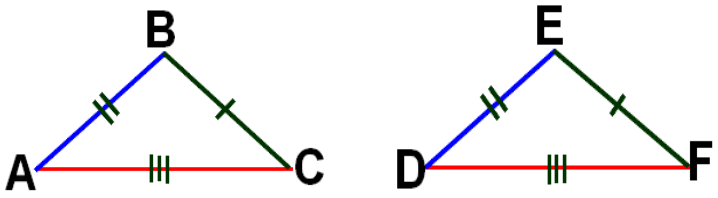
AB=DE; AC=DF;
$\angle A = \angle D$

Δ ABC = Δ DEF по двум сторонам и углу между ними



AC=DF ; $\angle A = \angle D$; $\angle C = \angle F$

$\Delta ABC = \Delta DEF$ по стороне и прилежащим к ней углам

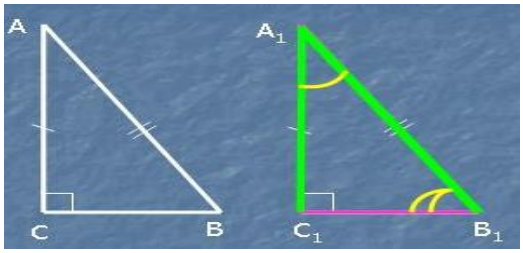


AB=DE; BC=EF; AC=DF;

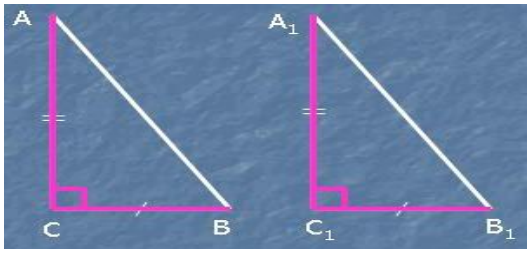
ΔABC=ΔDEF по трём сторонам

Приложение 6

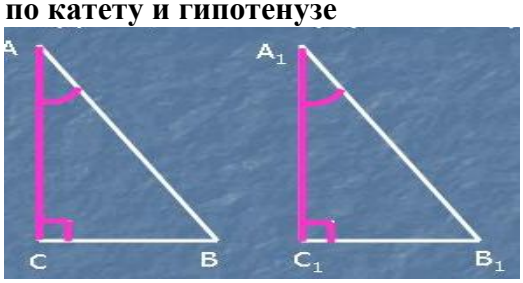
Признаки равенства прямоугольных треугольников



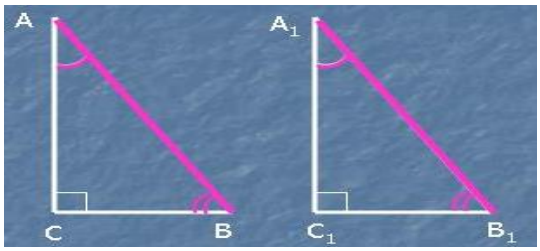
по катету и гипотенузе



по двум катетам



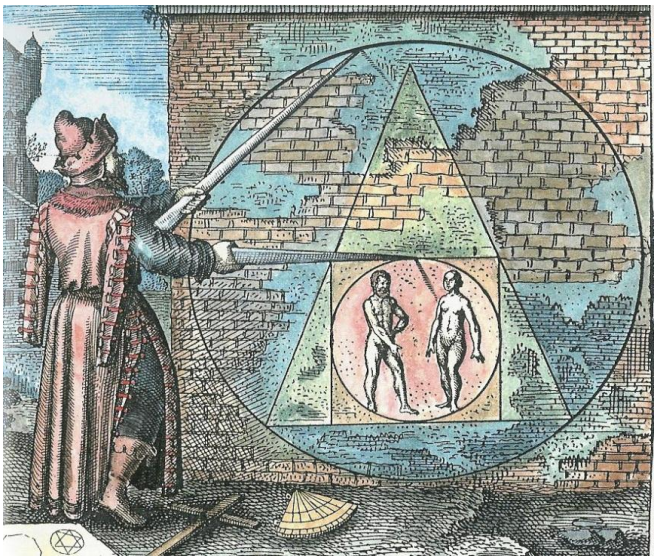
1. **по катету и острому углу**

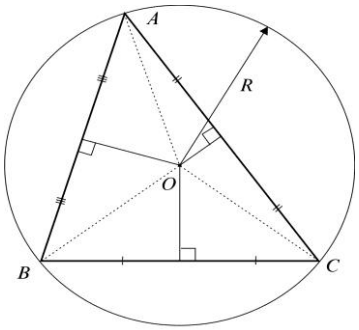


по гипотенузе и острому углу

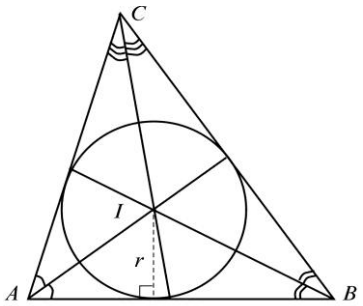
Приложение 7

Замечательные точки треугольника

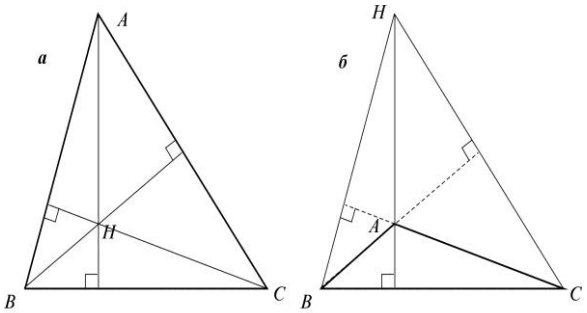




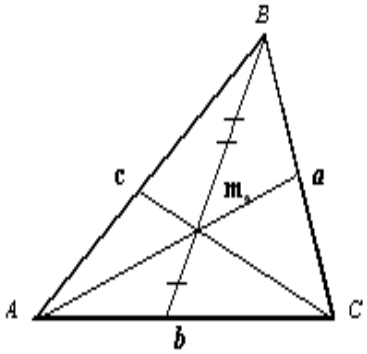
Центр описанной окружности
(точка пересечения серединных перпендикуляров)



Центр вписанной окружности
(точка пересечения биссектрис)



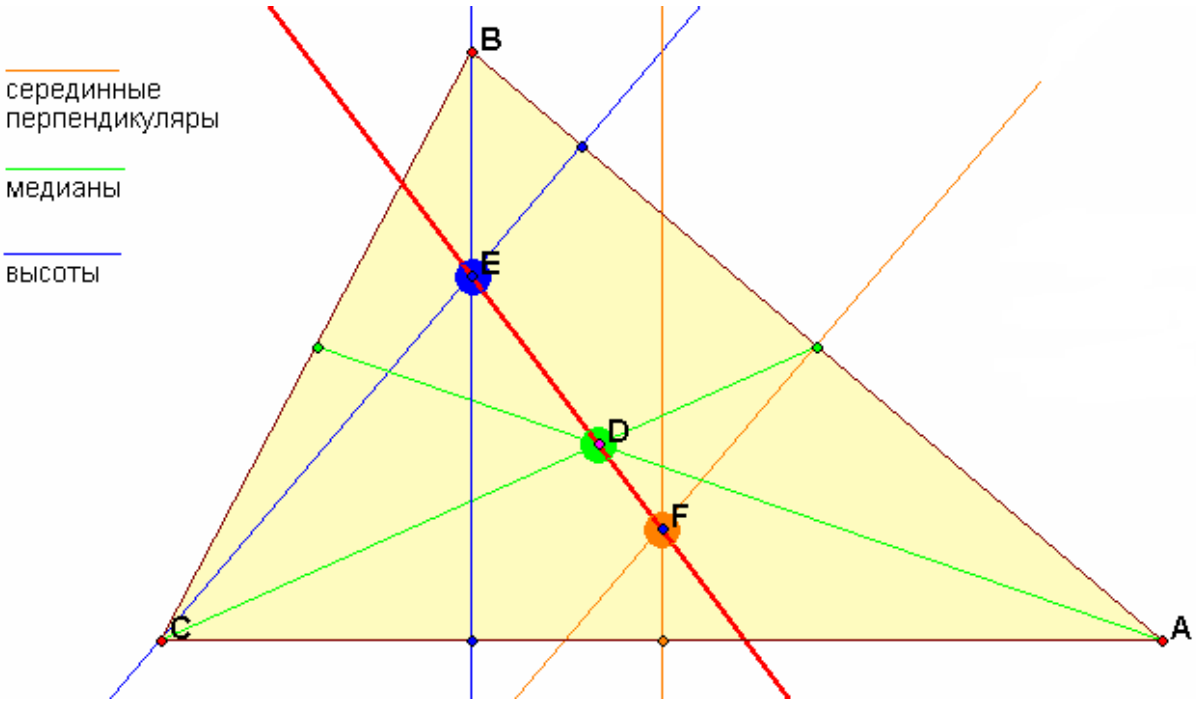
Ортоцентр треугольника
(точка пересечения высот)



Центр тяжести треугольника
(точка пересечения медиан)

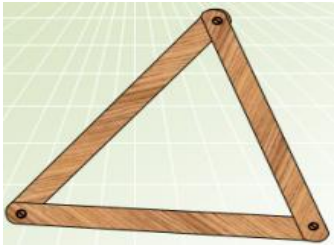
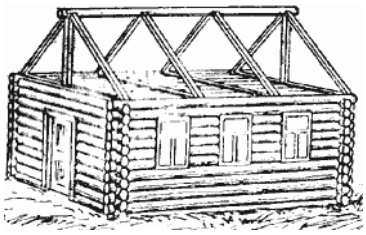
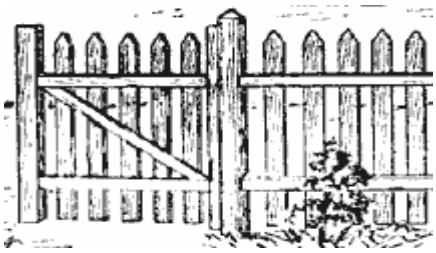
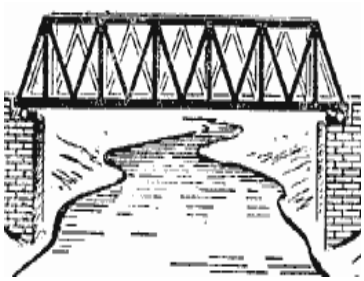
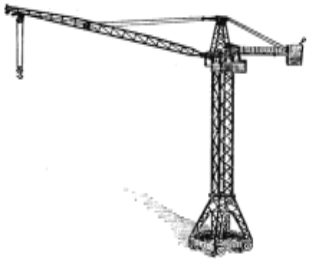
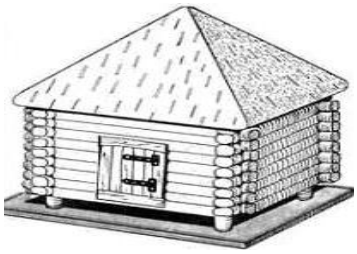
Приложение 8

Прямая Эйлера



Приложение 9

Треугольники вокруг нас

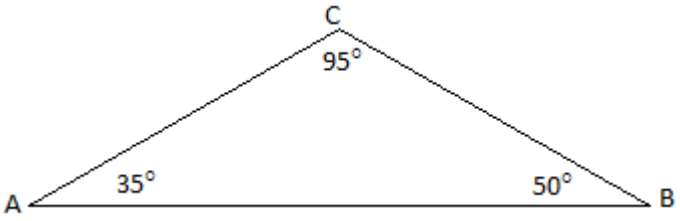







Приложение 10

Решение задач на применение треугольника

1. В условиях плохой видимости с береговых радиомаяков А и В, расстояние между которыми равно 10 км, запеленговано судно С. Определите расстояние от судна до каждого маяка, если с помощью радиопеленгаторов определены ∠CAB=35°, ∠CBA=50°.

Решение.



1) Рассмотрим Δ ABC. ∠C= 180° - (35°+50°)=95°.

2) По теореме синусов BC= $\frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{10 \cdot \sin 35°}{\sin 95°} \approx 5{,}7(км)$.

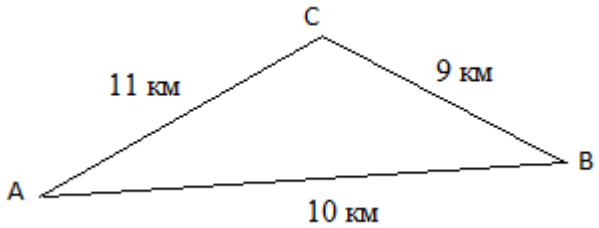
3) AC= $\frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{10 \cdot \sin 50°}{\sin 95°} \approx 7{,}7(км)$.

$\sin 35° \approx 0{,}57;$
$\sin 50° \approx 0{,}77;$
$\sin 95° \approx 0{,}9962$

Ответ: 5,7 км; 7,7 км.

2. Береговые радиомаяки А и В расположены на расстоянии 10 км. С судна С с помощью находящейся на ней радиолокационной станции, определены расстояния до маяков CA=11 км и CB=9 км. Найдите ∠CAB и ∠CBA пеленгов радиомаяков.

Решение.



1) Рассмотрим Δ ABC. По теореме косинусов

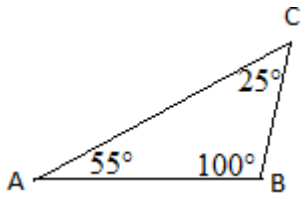
cosA= $\frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB} = \frac{11^2 + 10^2 - 9^2}{2 \cdot 11 \cdot 10} \approx 0{,}6364; \angle A \approx 50°30'$

2) cosB= $\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{9^2 + 10^2 - 11^2}{2 \cdot 9 \cdot 10} \approx 0{,}3333; \angle B \approx 70°30'$

Ответ: ∠CAB≈50°30′; ∠CBA≈70°30′

3. Два теплохода А и В, находящиеся в открытом море на расстоянии 20 км друг от друга, одновременно получили сигнал бедствия с тонущего корабля С. Радиопеленг по отношению к линии АВ на судне А равен 55°, а на судне В – 100°. Кто первым придет на помощь, если максимальная скорость судна А - 60 км/ч, судна В - 45 км/ч?

Решение.



$\sin 25° \approx 0{,}42;$
$\sin 55° \approx 0{,}82;$
$\sin 100° \approx 0{,}9848$

1) Рассмотрим Δ АВС. ∠С= 180° - (55°+100°)=25°.
2) По теореме синусов
4) $AC=\dfrac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=\dfrac{20\cdot 0{,}9848}{0{,}42}\approx 47(км)$.

3) $BC=\dfrac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\dfrac{20\cdot\sin 55°}{\sin 25°}=\dfrac{20\cdot 0{,}82}{0{,}42}\approx 39(км)$.

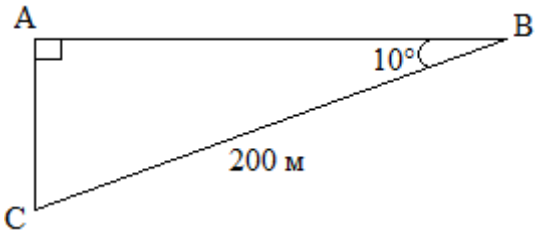
4) $t_A=\dfrac{47}{60}ч=47мин$. $t_B=\dfrac{39}{45}ч=\dfrac{13}{15}ч=\dfrac{52}{60}ч=52мин$.

5) 52 мин – 47 мин = 5 мин.

Ответ: судно А придет на помощь раньше на 5 минут.

4. Прямо по курсу ледокола В обнаружен айсберг. С помощью ультразвукового эхолота под максимальным углом 10° определена подводная точка С айсберга на расстоянии 200 м. Определите глубину h подводной части айсберга.

Решение.

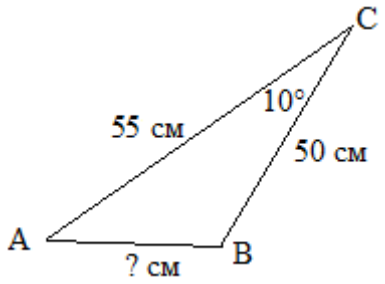


1) Рассмотрим Δ АВС: ∠А = 90°. sin 10 ≈ 0,17.
2) АС=ВС · sin10° ≈ 200 · 0,17 ≈34(м).

Ответ: АС≈34м.

5. При исследовании металлической детали методом ультразвуковой локации была обнаружена внутренняя трещина. Определите длину трещины AB, если расстояния от границ трещины до ультразвукового устройства C равны 50 см и 55 см, а $\angle ACB = 10°$.

Решение.



1) Рассмотрим ΔABC: $\angle C = 10°$. $\cos 10° \approx 0{,}985$.
2) По теореме косинусов

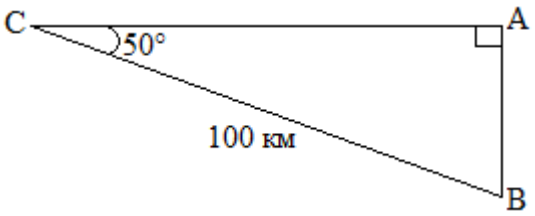
   $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 10°$

   $AB^2 = 55^2 + 50^2 - 2 \cdot 55 \cdot 50 \cdot 0{,}985 = 5525 - 5417{,}5 = 107{,}5$; $AB \approx 10{,}4$ см

Ответ: $AB \approx 10{,}4$ см

6. Сейсмической станцией C зафиксированы сильные подземные толчки на расстоянии 100 км от станции под углом 50° к поверхности земли. Определите глубину эпицентра землетрясения h.

Решение.



1) Рассмотрим ΔABC: $\angle A = 90°$. $\sin 50 \approx 0{,}77$.
2) $AB = BC \cdot \sin 50° \approx 100 \cdot 0{,}77 = 77$(км).

Ответ: эпицентр землетрясения находится на глубине 77 км.

Приложение 11

Творческие работы